

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**СОГЛАСОВАНО**

**Заведующий кафедрой**

**Кафедра теории функций  
(ТФ\_ФМиИ)**

наименование кафедры

подпись, инициалы, фамилия

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

институт, реализующий ОП ВО

**УТВЕРЖДАЮ**

**Заведующий кафедрой**

**Кафедра теории функций  
(ТФ\_ФМиИ)**

наименование кафедры

**Цих Август Карлович**

подпись, инициалы, фамилия

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

институт, реализующий дисциплину

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА  
МНОГООБРАЗИЯХ**

Дисциплина Б1.В.ДВ.08.01 Интегрирование на многообразиях

Направление подготовки /  
специальность 01.03.01 Математика Профиль 01.03.01.31  
Математический анализ, алгебра и логика

Направленность  
(профиль)

Форма обучения

очная

Год набора

2021

Красноярск 2021

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования с учетом профессиональных стандартов по укрупненной группе

010000 «МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

---

Направление подготовки /специальность (профиль/специализация)

Направление 01.03.01 Математика Профиль 01.03.01.31

---

Математический анализ, алгебра и логика

---

Программу  
составили

кандидат физ.-матем. наук, доцент, Знаменская  
О.В.; доктор физ.матем. наук, профессор, Цих А.К.

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины

### 1.1 Цель преподавания дисциплины

Как известно, основу интегрального исчисления функций одного переменного составляет теорема Ньютона-Лейбница. Ее многомерным аналогом служит общая теорема Стокса. Концепция интеграла предполагает наличие двух объектов: того, что интегрируется (функция, дифференциальная форма, тензор и т.п.) и того, по чему интегрируется (по множеству, контуру, цепи и т.п.). В многомерной ситуации указанные объекты могут иметь сложную структуру в геометрическом и аналитическом аспектах. Эти аспекты породили самостоятельные направления в многомерной геометрии: теорию кохомологий и теорию гомологий. В данном курсе основы теории кохомологий излагаются в адаптированном для теории кратного интегрирования виде.

### 1.1. Цель преподавания дисциплины

Настоящий курс посвящен изложению теории кохомологий, адаптированной для теории кратного интегрирования. Его целью является:

- повышение качества математической подготовки студентов путем изучения теории и методов кратного интегрирования;
- формирование представлений о единстве математики на примере теории кохомологий, где в равной мере участвуют анализ, алгебра и геометрия.

### 1.2 Задачи изучения дисциплины

Задачей изучения дисциплины является освоение методов теории кохомологий как многомерной версии теории неопределенного интеграла.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать понятия многообразия и дифференциальной формы на многообразии; замкнутые, точные формы, кохомологии де Рама; теорему Пуанкаре; дифференцирование и интегрирование форм на многообразиях; точную кохомологическую последовательность Майера-Виеториса, формулу Стокса;

уметь вводить на множествах структуру многообразия разного класса гладкости; применять кохомологическую последовательность Майера-Виеториса для вычисления кохомологий де Рама; применять абстрактную формулу Стокса для вычисления интегралов в конкретных ситуациях;

владеть основными понятиями и методами теории когомологий.

1.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

|  |
|--|
| <b>ПК-1:Способен применять базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий при проведении исследования в конкретной области профессиональной деятельности</b>  |
| <b>ПК-1.1:Применяет теоретические и практические знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий для проведения в конкретной области профессиональной деятельности</b> |
| <b>ПК-1.2:Решает научные задачи в соответствии с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой</b>   |
| <b>ПК-2:Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности</b>   |
| <b>ПК-2.2:Представляет научные результаты на учебных семинарах</b>   |

1.4 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Для изучения данной дисциплины необходимы знания по математическому и функциональному анализу, линейной алгебре и дифференциальной геометрии в объеме стандартных курсов.

Результаты изучения данной дисциплины используются при обучении в магистратуре по профилю подготовки 01.04.01.01. Комплексный анализ, а также при подготовке к итоговой аттестации и выполнении выпускной квалификационной работы.

1.5 Особенности реализации дисциплины  
Язык реализации дисциплины Русский.

Дисциплина (модуль) реализуется с применением ЭО и ДОТ

<https://e.sfu-kras.ru/course/view.php?id=13944>

## 2. Объем дисциплины (модуля)

| Вид учебной работы                         | Всего,<br>зачетных<br>единиц<br>(акад.час) | Семестр        |
|--|--|----------------|
|  |  | 7              |
| <b>Общая трудоемкость дисциплины</b>       | <b>3 (108)</b>                             | <b>3 (108)</b> |
| <b>Контактная работа с преподавателем:</b> | <b>2 (72)</b>                              | <b>2 (72)</b>  |
| занятия лекционного типа                   | 1 (36)                                     | 1 (36)         |
| занятия семинарского типа                  |  |                |
| в том числе: семинары                      |  |                |
| практические занятия                       | 1 (36)                                     | 1 (36)         |
| практикумы                                 |  |                |
| лабораторные работы                        |  |                |
| другие виды контактной работы              |  |                |
| в том числе: групповые консультации        |  |                |
| индивидуальные консультации                |  |                |
| иная внеаудиторная контактная работа:      |  |                |
| групповые занятия                          |  |                |
| индивидуальные занятия                     |  |                |
| <b>Самостоятельная работа обучающихся:</b> | <b>1 (36)</b>                              | <b>1 (36)</b>  |
| изучение теоретического курса (ТО)         |  |                |
| расчетно-графические задания, задачи (РГЗ) |  |                |
| реферат, эссе (Р)                          |  |                |
| курсовое проектирование (КП)               | Нет  | Нет            |
| курсовая работа (КР)                       | Нет  | Нет            |
| <b>Промежуточная аттестация (Зачёт)</b>    |  |                |

### 3 Содержание дисциплины (модуля)

#### 3.1 Разделы дисциплины и виды занятий (тематический план занятий)

| № п/п | Модули, темы (разделы) дисциплины                                    | Занятия лекционного типа (акад. час) | Занятия семинарского типа                       |  | Самостоятельная работа, (акад. час) | Формируемые компетенции |
|-------|--|--------------------------------------|---|--|-------------------------------------|-------------------------|
|       |  |                                      | Семинары и/или Практические занятия (акад. час) | Лабораторные работы и/или Практикумы (акад. час) |                                     |                         |
| 1     | 2  | 3                                    | 4   | 5  | 6                                   | 7                       |
| 1     | Вещественные и комплексные многообразия                              | 12                                   | 12  | 0  | 0                                   |                         |
| 2     | Дифференциальные формы на многообразиях                              | 6                                    | 6   | 0  | 0                                   |                         |
| 3     | Когомологии де Рама как многомерная версия неопределенного интеграла | 10                                   | 10  | 0  | 0                                   |                         |
| 4     | Интегрирование дифференциальных форм                                 | 8                                    | 8   | 0  | 36                                  |                         |
| Всего |  | 36                                   | 36  | 0  | 36                                  |                         |

#### 3.2 Занятия лекционного типа

| № п/п | № раздела дисциплины | Наименование занятий | Объем в акад. часах |                                    |                                  |
|-------|----------------------|----------------------|---------------------|------------------------------------|----------------------------------|
|       |                      |                      | Всего               | в том числе, в инновационной форме | в том числе, в электронной форме |

|   |   |  |   |   |   |
|---|---|--|---|---|---|
| 1 | 1 | <p>Понятие многообразия. Определение многообразия, классы топологических, гладких, аналитических многообразий. Простейшие примеры многообразий. Топологические пространства, не являющиеся многообразиями. Комплексные многообразия.</p>   | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | <p>Классические примеры многообразий. Многообразия уровня. Вещественное проективное пространство <math>RP^n</math>. Комплексное проективное пространство <math>CP^n</math>, связь <math>CP^1</math> со сферой Римана. Римановы поверхности.</p>  | 4 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | <p>Разбиение единицы. Функция шапочки; склейка разбиения единицы с помощью шапочек. Теорема Сарда.</p>   | 2 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | <p>Вложения многообразий и их триангулируемость. Погружения, субмерсии и вложения многообразий. Теорема о вложении в <math>R^N</math> компактных многообразий. Теорема о вложении в <math>R^{2n+1}</math> произвольных <math>n</math>-мерных многообразий. Теорема о триангулируемости многообразий.</p> | 4 | 0 | 0 |

|   |   |  |   |   |   |
|---|---|--|---|---|---|
| 5 | 2 | <p>Отображения многообразий, их дифференциалы и касательные пространства.</p> <p>Отображения многообразий.</p> <p>Касательные векторы, касательные пространства и дифференциалы отображений.</p> <p>Касательное расслоение и векторные поля.</p>   | 2 | 0 | 0 |
| 6 | 2 | <p>Понятие дифференциальной формы.</p> <p>Наводящие соображения, определение дифференциальной формы на многообразии.</p> <p>Операции сложения и внешнего умножения дифференциальных форм. Канонический вид дифференциальной формы.</p>   | 2 | 0 | 0 |
| 7 | 2 | <p>Дифференциал формы.</p> <p>Определение дифференциала формы.</p> <p>Свойства дифференциала в фиксированной системе координат, преобразование дифференциала формы относительно отображений.</p> <p>Корректность определения понятия дифференциала (инвариантность).</p> <p>Примеры.</p> | 2 | 0 | 0 |

|    |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|
| 8  | 3 | Когомологии де Рама. Замкнутые и точные формы, определение группы когомологий де Рама, пример замкнутой, но не точной формы (форма Пуанкаре).   | 2 | 0 | 0 |
| 9  | 3 | Теорема Пуанкаре. Гомотопическая инвариантность групп когомологий. Определение звездной области. Теорема Пуанкаре. Гомотопически эквивалентные многообразия. Теорема о гомотопической инвариантности.   | 2 | 0 | 0 |
| 10 | 3 | Примеры гомотопически эквивалентных многообразий. Звездная область гомотопически эквивалентна одноточечному многообразию. Гомотопическая эквивалентность сфере $S_n$ многообразия $R^{n+1} \setminus \{0\}$ и комплексной квадратики, другие примеры. | 2 | 0 | 0 |
| 11 | 3 | Когомологии сферы. Когомологии окружности и $n$ -мерной сферы в случае $n=2$ .  | 2 | 0 | 0 |
| 12 | 3 | Когомологическая последовательность Майера–Вьеториса. Основной инструмент для вычисления когомологий де Рама — когомологическая последовательность Майера–Вьеториса. Принцип Майера–Вьеториса.  | 2 | 0 | 0 |

|       |   |   |    |   |   |
|-------|---|---|----|---|---|
| 13    | 4 | Ориентируемость многообразий. Определение ориентируемого многообразия. Ориентируемость. Условие ориентируемости $R^n$ . Ориентируемость произвольного комплексно аналитического многообразия. Условие ориентируемости в терминах дифференциальных форм. | 2  | 0 | 0 |
| 14    | 4 | Интеграл дифференциальной формы по ориентируемому многообразию. Многообразия с краем: определение, примеры, индуцированная ориентация на крае. Интеграл дифференциальной формы по ориентируемому многообразию (с краем).                                | 2  | 0 | 0 |
| 15    | 4 | Теорема Стокса. Общая формула Стокса. Формула Ньютона–Лейбница как формула Стокса на прямой. Формулы Грина, Гаусса–Остроградского и классическая формула Стокса как следствия из общей формулы Стокса. Другие следствия из формулы Стокса.              | 4  | 0 | 0 |
| Итого |   |   | 26 | 0 | 0 |

### 3.3 Занятия семинарского типа

|  |  |  |                     |  |  |
|--|--|--|---------------------|--|--|
|  |  |  | Объем в акад. часах |  |  |
|--|--|--|---------------------|--|--|

|    |   |   | Всего | в том числе, в инновационной форме | в том числе, в электронной форме |
|----|---|---|-------|------------------------------------|----------------------------------|
| 1  | 1 | Понятие многообразия  | 2     | 0                                  | 0                                |
| 2  | 1 | Классические примеры многообразий. Многообразия уровня. Вещественное проективное пространство $RP_n$ .      | 2     | 0                                  | 0                                |
| 3  | 1 | Комплексное проективное пространство $CP_n$ , связь $CP^1$ со сферой Римана. Римановы поверхности.          | 2     | 0                                  | 0                                |
| 4  | 1 | Разбиение единицы   | 2     | 0                                  | 0                                |
| 5  | 1 | Погружения, субмерсии и вложения многообразий.  | 2     | 0                                  | 0                                |
| 6  | 1 | Теорема о вложении в $R^{2n+1}$ произвольных $n$ -мерных многообразий. Триангулируемость многообразий.      | 2     | 0                                  | 0                                |
| 7  | 2 | Отображения многообразий, их дифференциалы и касательные пространства.                                      | 2     | 0                                  | 0                                |
| 8  | 2 | Операции сложения и внешнего умножения дифференциальных форм. Канонический вид дифференциальной формы.      | 2     | 0                                  | 0                                |
| 9  | 2 | Дифференциал формы  | 2     | 0                                  | 0                                |
| 10 | 3 | Замкнутые и точные формы, группа когомологий де Рама, пример замкнутой, но не точной формы (форма Пуанкаре) | 2     | 0                                  | 0                                |
| 11 | 3 | Звездные области. Гомотопически эквивалентные многообразия.   | 2     | 0                                  | 0                                |
| 12 | 3 | Когомологии окружности и $n$ -мерной сферы в случае $n=2$ .   | 2     | 0                                  | 0                                |

|       |   |   |    |   |   |
|-------|---|---|----|---|---|
| 13    | 3 | Когомологическая последовательность Майера–Вьеториса.   | 2  | 0 | 0 |
| 14    | 3 | Ориентируемость многообразий.   | 2  | 0 | 0 |
| 15    | 4 | Многообразия с краем: определение, примеры, индуцированная ориентация на крае.  | 2  | 0 | 0 |
| 16    | 4 | Интеграл дифференциальной формы по ориентируемому многообразию (с краем).   | 2  | 0 | 0 |
| 17    | 4 | Общая формула Стокса. Вычисление некоторых интегралов.  | 2  | 0 | 0 |
| 18    | 4 | Формулы Грина, Гаусса–Остроградского и классическая формула Стокса как следствия из общей формулы Стокса. Другие следствия из формулы Стокса. | 2  | 0 | 0 |
| Всего |   |   | 26 | 0 | 0 |

### 3.4 Лабораторные занятия

| № п/п | № раздела дисциплины | Наименование занятий | Объем в акад. часах |                                    |                                  |
|-------|----------------------|----------------------|---------------------|------------------------------------|----------------------------------|
|       |                      |                      | Всего               | в том числе, в инновационной форме | в том числе, в электронной форме |
| Всего |                      |                      |                     |                                    |                                  |

## 4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

|      | Авторы, составители   | Заглавие  | Издательство, год         |
|------|---|---|---------------------------|
| Л1.1 | Антипова И. А.,<br>Знаменская О. В.,<br>Лейнартас Е. К.,<br>Цих А. К. | Кратное интегрирование. Когомологии: электрон. учеб.-метод. комплекс дисциплины | Красноярск: ИПК СФУ, 2007 |

## 5 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Оценочные средства находятся в приложении к рабочим программам дисциплин.

## 6 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

| 6.1. Основная литература       |                            |   |                             |
|--------------------------------|----------------------------|---|-----------------------------|
|                                | Авторы, составители        | Заглавие  | Издательство, год           |
| Л1.1                           | Телеман К.                 | Элементы топологии и дифференцируемые многообразия: перевод с румынского  | Москва: Мир, 1967           |
| Л1.2                           | Нарасимхан Р., Шабат Б. В. | Анализ на действительных и комплексных многообразиях: перевод с английского   | Москва: Мир, 1971           |
| 6.2. Дополнительная литература |                            |   |                             |
|                                | Авторы, составители        | Заглавие  | Издательство, год           |
| Л2.1                           | Шабат Б. В.                | Введение в комплексный анализ: Ч. 1. Функции одного переменного: учебник для университетов по специальностям "Математика", "Механика" : [в 2 ч.]  | Санкт-Петербург: Лань, 2004 |
| Л2.2                           | Шабат Б. В.                | Введение в комплексный анализ: Ч. 2. Функции нескольких переменных: учебник для университетов по специальностям "Математика", "Механика": [в 2 ч.]  | Санкт-Петербург: Лань, 2004 |
| Л2.3                           | Мамфорд Д.                 | Красная книга о многообразиях и схемах: перевод с английского   | Москва: МЦНМО, 2007         |
| Л2.4                           | Антипова И. А.             | Интегральные преобразования и их применения: учебно-методическое пособие [для студентов напр. 01.03.04 «Прикладная математика», а также может быть полезным бакалаврам направлений 01.03.01 «Математика», 01.03.01 «Математика и компьютерные науки», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»] | Красноярск: СФУ, 2016       |
| Л2.5                           | Шабат Б.В.                 | Введение в комплексный анализ: учеб. для студ. унив-в   | , 2004                      |
| 6.3. Методические разработки   |                            |   |                             |
|                                | Авторы, составители        | Заглавие  | Издательство, год           |

|      |   |   |                              |
|------|---|---|------------------------------|
| ЛЗ.1 | Антипова И. А.,<br>Знаменская О.<br>В., Лейнартас Е.<br>К., Цих А. К. | Кратное интегрирование. Когомологии:<br>электрон. учеб.-метод. комплекс<br>дисциплины | Красноярск:<br>ИПК СФУ, 2007 |
|------|---|---|------------------------------|

**7 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

|    |                                      |   |
|----|--------------------------------------|---|
| Э1 | Общероссийский математический портал | <a href="http://bik.sfu-kras.ru/">http://bik.sfu-kras.ru/</a> |
| Э2 | Электронный каталог НБ СФУ           | <a href="http://www.mathnet.ru/">http://www.mathnet.ru/</a>   |

## **8 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины прилагаются к рабочей программе дисциплины отдельным документом, в том числе, включающим в себя указания по организации самостоятельной работы обучающихся, а также указания по организации работы на занятиях, проводимых в инновационных формах обучения. Методические указания разработаны согласно требованиям СФУ по разработке и структуре УМК дисциплины.

Для самостоятельного изучения теоретического материала используются учебные пособия и монографии, приведённые в списке литературы.

Самостоятельная работа студентов по данной дисциплине заключается в изучении основной и дополнительной литературы по темам лекций и семинарских занятий, а также решении блоков заданий по разделам дисциплины.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины изложено в соответствующих разделах пособия для самостоятельной работы, входящего в состав УМКД: Кратное интегрирование. Когомологии [Электронный ресурс]: электрон. учеб.-метод. комплекс дисциплины / И. А. Антипова [и др.]; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF; 20666 кб). - Красноярск: [б. и.], 2007 ИПК СФУ. - on-line. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции; № 17-2007). - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.

Данные учебные материалы доступны для студентов в локальной сети СФУ.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации в зависимости от нозологии:

Для лиц с нарушениями зрения: в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме, в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме, в форме электронного документа.

## **9 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю) (при необходимости)**

### **9.1 Перечень необходимого программного обеспечения**

|       |   |
|-------|---|
| 9.1.1 | Специальное программное обеспечение в учебном процессе по данной дисциплине не используется. Методика проведения занятий допускает использование технических средств (проекторы, интерактивные доски), обеспеченных соответствующим программным обеспечением. |
|-------|---|

### **9.2 Перечень необходимых информационных справочных систем**

|       |   |
|-------|---|
| 9.2.1 | Для самостоятельной работы у студентов должен быть доступ к электронному каталогу НБ СФУ. |
|-------|---|

## **10 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Методика проведения занятий допускает как использование технических средств (проекторы, интерактивные доски), так и классические ауди-торные занятия, обеспечиваемые стандартными материально-техническими средствами.

Лекционные аудитории должны быть оборудованы современным видеопроеционным оборудованием для презентаций, средствами звуковоспроизведения, экраном, и иметь выход в Интернет, а также иметь интерактивную доску или доску для письма маркерами.

Помещения для проведения семинарских занятий должны иметь мультимедийное оборудование, а также иметь интерактивную доску или доску для письма маркерами, учебную мебель.

Библиотека должна иметь рабочие места для студентов, оснащенные компьютерами с доступом к базам данных, локальную сеть университета и Интернет.

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья, в зависимости от нозологий, осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения.